



Concursul de Matematică Upper.School Kids Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a IV-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Cristina Frone

§1 Soluții

Problema 1

Un număr natural de 6 cifre are proprietatea că cea mai mare dintre cifre apare de exact 3 ori, iar celelalte cifre se pot repeta de cel mult două ori. Care este cel mai mic dintre aceste numere?

Demonstrație. Deoarece o cifră apare de exact 3 ori, iar celelalte cifre se pot repeta de cel mult două ori, numărul căutat de 6 cifre are cel puțin 3 cifre diferite. Pentru a afla cel mai mic dintre aceste numere vom folosi cele mai mici cifre, adică 0, 1 și 2. Cea mai mare cifră este 2 și o vom folosi de exact 3 ori. Cifra 0, care este cea mai mică, o vom folosi de două ori și atunci numărul căutat este $\boxed{100222}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{100222}$ 5p

□

Problema 2

Care este cel mai mare număr natural pentru care atât suma cifrelor sale, cât și produsul cifrelor sale sunt egale cu 10?

Demonstrație. Produsul cifrelor este 10 pe care îl putem scrie $10 = 2 \times 5$, însă suma acestora este $2 + 5 = 7$, adică mai avem nevoie de trei cifre de 1. Cifrele din care este format numărul sunt 1, 1, 1, 2 și 5, iar cel mai mare număr pe care îl putem forma cu aceste cifre este $\boxed{52111}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{52111}$ 5p

□

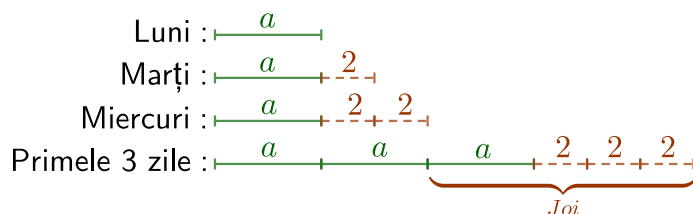
Problema 3

Diana plantează flori cu bunica în zilele de luni, marți, miercuri și joi și observă că în fiecare zi începând cu marți au plantat cu două flori mai mult față de ziua precedentă. Joi au plantat jumătate din totalul florilor plantate în primele trei zile ale săptămânii. Câte flori au plantat Diana și bunica în ziua de luni?



Demonstrație.

Soluția I: În primele 3 zile ale săptămânii numărul de flori plantate este reprezentat prin 3 părți egale plus 6, iar în ziua de joi au plantat un număr de flori egale cu o parte egală plus 6. De aici obținem că o parte egală plus 6 reprezintă tot atât cât două părți egale, deci o parte egală este 6. În ziua de luni cele două au plantat $\boxed{6}$ flori.



Soluția II: Vom nota cu a numărul de flori plantate luni și atunci, în următoarele zile plantează $a + 2$, $a + 4$ și $a + 6$ flori. În primele trei zile se plantează $a + a + 2 + a + 4 = 3 \times a + 6$ flori și acestea reprezintă dublul numărul de flori plantate joi. Adică:

$$3 \times a + 6 = 2 \times (a + 6)$$

$$3 \times a + 6 = 2 \times a + 12$$

$$3 \times a - 2 \times a = 12 - 6$$

$$a = \boxed{6}.$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{6}$ 5p

Problema 4

Suma a trei numere este 2718. Dacă din primul scădem 348, din al doilea 70 și din al treilea 374, numerele devin egale. Care este valoarea celui mai mare dintre numere?

Demonstrație.



$$2718 - 348 - 70 - 374 = 1926$$

$$1926 : 3 = 642$$

Cel mai mare dintre numere este cel din care s-a scăzut cel mai mult, adică $642 + 374 = \boxed{1016}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{1016}$ 5p

Problema 5

O tabletă costă cât două telefoane. Cu 10150 RON cumpăr 12 tablete și 5 telefoane. Cât costă o tabletă?

Demonstrație. Prețul pentru 12 tablete este cât pentru $12 \times 2 = 24$ telefoane, deci cu 10150 RON pot cumpăra $24 + 5 = 29$ telefoane. Prețul unui telefon este $10150 : 29 = 350$ RON, deci o tabletă costă $350 \times 2 = \boxed{700}$ RON.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{700}$ 5p

Problema 6

Economiile din pușculița Anei sunt în bancnote de 5 și 10 RON. Știind că are 50 de bancnote și suma de 435 RON, aflați câte bancnote de 10 RON are Ana.



Demonstrație. Dacă ar avea doar bancnote de 10 RON, atunci în pușculiță ar fi $50 \times 10 = 500$ RON. Diferența provine de la numărul de bancnote de 5 RON, adică $(500 - 435) : 5 = 13$. Numărul bancnotelor de 10 RON este egal cu $50 - 13 = \boxed{37}$.

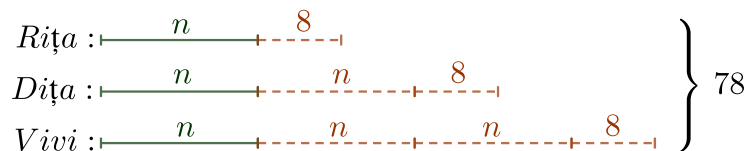
Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{37}$ 5p

Problema 7

Veverițele Rița, Dița și Vivi au adunat nuci. După o vreme ele au constatat că Rița a mâncat 8 nuci din ce adunase, Dița a mâncat atâtea nuci cât culesese Rița, iar Vivi a mâncat atâtea cât culesese Dița. Acum fiecare veveriță are același număr de nuci. Știind că ele au strâns împreună la început 78 de nuci, să se afle câte nuci a strâns veverița Vivi.



Demonstrație. Reprezentăm prin segmente numărul de nuci culesse de fiecare dintre veverițe. Segmentul notat cu n reprezintă numărul de nuci cu care a rămas Rița după ce a mâncat 8 nuci.



6 părți egale sunt egale cu $78 - 3 \times 8 = 78 - 24 = 54$, deci o parte egală este $54 : 6 = 9$. Vivi a strâns $3 \times 9 + 8 = 27 + 8 = \boxed{35}$ nuci.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{35}$ 5p

Problema 8

Când au ajuns la Balul Mascat de primăvară elefantul, girafa, leul și zebra au fost invitate să își aleagă câte o mască dintre cele 4 existente, fiecare având față de elefant, girafă, leu sau zebra, dar niciun animal nu are voie să poarte masca identică cu specia lui. *De exemplu, elefantul nu are voie să poarte masca de elefant.*

Elefantului nu i-au plăcut măștile de girafă și leu, iar girafa detestă masca de leu. În cele din urmă au reușit să își aleagă câte o mască pe gustul fiecăreia. Ce mască poartă leul?



a) elefant

b) girafă

c) leu

d) zebra

Demonstrație.

- Elefantul nu poartă masca de girafă, leu sau elefant, deci a avut ca singură opțiune masca de zebra;
- Girafa nu poartă masca de leu sau girafă, cea de zebra a fost luată de elefant, deci a rămas cu masca de elefant;
- Au mai rămas două măști, cea de leu și cea de girafă. Leul nu poate purta masca de leu, deci a rămas să o poarte pe cea de girafă.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): a) 5p
 b)
 c)
 d)

Problema 9

Am 7 lumânări identice și fiecare arde câte 6 ore. Din oră în oră aprind câte o lumânare. Cât timp vor arde simultan exact 3 lumânări?



a) 12 ore

b) 10 ore

c) 3 ore

d) 2 ore

Demonstrație. Am reprezentat soluția în tabelul de mai jos:

		Lumânări						
		1	2	3	4	5	6	7
Ore	1							
	2							
	3							
	4							
	5							
	6							
	7							
	8							
	9							
	10							
	11							
	12							

Singurele ore în care ard simultan trei lumânări sunt a III-a și a X-a, deci numărul de ore în care ard simultan 3 lumânări este egal cu .

Răspuns corect (vezi soluția video [aici](#)):

Problema 10

Cei 10 elfi și trolli au primit fiecare câte un jeton pe care este scris un număr diferit, de la 1 la 10. Fiecare a fost întrebat ce număr este pe jetonul lui și toți au răspuns. Elfii au spus adevărul, însă fiecare troll a mințit. Suma răspunsurilor a fost 36. Care este cel mai mic număr de trolli care ar putea fi în grup?



- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

Demonstrație. Suma numerelor de pe cele 10 jetoane este $1 + 2 + \dots + 10 = (1 + 10) \times 10 : 2 = 55$. Suma numerelor care au fost anunțate este cu $55 - 36 = 19$ mai mică, acest număr reprezentând suma numerelor de pe jetoanele trollilor minus suma numerelor pe care le-au anunțat trollii.

- Dacă ar fi un singur troll, atunci el ar putea avea pe jeton cel mult 10 și ar putea anunța cel puțin 1, adică suma ar scădea cu 9 și acest număr este prea mic;
- Dacă ar fi doi trolli, atunci ei ar putea avea pe jetoane cel mult 9 și 10 și ar putea anunța cel mai puțin 1 și 1, adică suma ar scădea cu 17, din nou prea mic;
- Pentru 3 trolli există mai multe exemple. Unul dintre ele este următorul: trollii au jetoane cu numerele 6, 7, 9 și anunță numerele 1, 1 și 1, deci suma scade cu exact 19.

Cel mai mic număr de trolli care ar putea fi în grup este .

Răspuns corect (vezi soluția video aici): 5p

**Problema 11**

Pentru avanpremieră filmului Motanul Încălțat s-a ales o sală cu 40 de locuri, distribuite în mod egal în mai multe rânduri. Numărul rândurilor este cel puțin egal cu 2. Andrei a ocupat pentru el și prietenii lui tot rândul de la mijloc. Câți prieteni a invitat Andrei la film?



a) 10

b) 7

c) 4

d) 8

Demonstrație. Pentru a calcula numărul de locuri din sală se înmulțește numărul de rânduri cu numărul de locuri de pe fiecare rând, așadar primul pas este să aflăm în câte moduri îl putem scrie pe 40 ca produs de două numere naturale.

$$40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8.$$

Pentru că există rândul de la mijloc rezultă că numărul de rânduri este impar și mai mare sau egal cu 3. Singura variantă este $40 = 5 \times 8$, deci sunt 5 rânduri cu câte 8 scaune pe fiecare, unul este pentru Andrei și restul pentru cei prieteni ai lui.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): 5p



Problema 12

Într-o dimineață de primăvară lângă palmierul în care locuiește de multă vreme maimuța singuratică a ajuns țestoasa Shelly. Fericită că are cu cine să vorbească, maimuța a coborât repede din palmier.

- *Bună ziua, Shelly! Mă bucur mult că te-am întâlnit! Dar de ce te miști așa de încet?*

- *Vezi tu, maimuță singuratică, vârsta pe care o am mă împiedică să fiu mai zglobie.*

- *Câți ani ai, țestoasă Shelly?*

- *Eu și cele două surori mai tinere ale mele am trecut fiecare de 100 de ani. Vârstele noastre au aceleași cifre la sute și la zeci și însumate dau 468. Țiți mai pot spune că ne-am născut în ani diferiți, dar în aceeași lună din vară.*

Care este cea mai mică vârstă pe care ar putea să o aibă țestoasa Shelly?



a) 243

b) 195

c) 112

d) 157

Demonstrație. Cifra sutelor nu poate fi mai mare decât 1 pentru că suma celor trei vârste ar depăși 600. Dacă cifra zecilor numerelor care reprezintă vârstele ar fi mai mare decât 6, atunci suma lor ar fi mai mare decât $160 \times 3 = 480$, deci este prea mare. Dacă aceasta ar fi cel mult 4, atunci suma vârstelor ar fi cel mult $147 + 148 + 149 = 444$, care este prea mică. Așadar, cifra zecilor este egală cu 5 și cele trei numere care reprezintă vârstele țestoaselor sunt de forma $\overline{15c}$, $\overline{15d}$ și $\overline{15e}$ cu $c < d < e$. Obținem astfel că $c + d + e = 468 - 3 \times 150 = 18$, iar cea mai mică valoare pe care o poate lua e este 7. În acest caz cele două țestoase mai tinere au 155 și 156 de ani, iar Shelly are vârsta de $\boxed{157}$ ani.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): \boxed{d} 5p

□

Problema 13

Bunicul a mers la pescuit în 5 zile consecutive. În fiecare zi a prins mai mulți pești decât în ziua precedentă, iar în a cincea zi a prins de cinci ori mai mulți pești decât în prima zi. La sfârșitul celor 5 zile de pescuit a socotit că a avut o captură totală de 45 de pești. Care este cel mai mare număr de pești pe care ar fi putut să îi prindă în a patra zi?



a) 24

b) 10

c) 14

d) 12

Demonstrație. Vom nota cu $a < b < c < d < e$ numărul de pești pe care i-a prins în fiecare dintre cele 5 zile. Știm că $e = 5 \times a$, deci $a + b + c + d + e = 45$, adică $a + b + c + d + 5 \times a = 45$ sau $6 \times a + b + c + d = 45$.

- Dacă $a \geq 5$, atunci $b \geq 6, c \geq 7, d \geq 8$ și $e \geq 25$, deci $a + b + c + d + e \geq 51 > 45$, deci numărul de pești prinși în prima zi este cel mult 4.
- Dacă $a \leq 2$, atunci $e \leq 10$ și $b + c + d \leq 7 + 8 + 9 = 24$, deci $a + b + c + d + e \leq 36 < 45$, așadar numărul de pești prinși în prima zi este cel puțin 3.
- Dacă $a = 3$, atunci $e = 15$ și $b + c + d = 27$. Cea mai mare valoare pentru d este 14 atunci când $b + c = 13$, iar un exemplu este $3 < 4 < 9 < 14 < 15$.
- Dacă $a = 4$, atunci $e = 20$ și $b + c + d = 21$. Ca d să fie cât mai mare trebuie ca $b + c$ să fie cât mai mic, deci $b = 5, c = 6$ și $d = 10$, valoare mai mică față de cea obținută în cazul anterior.

Prin urmare, cel mai mare număr de pești care ar fi putut fi prins este 14.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): c 5p □

Problema 14

Sportivii de la două cluburi de tenis au organizat o competiție pentru a strânge fonduri pentru copiii din Ucraina. Știind că fiecare sportiv a jucat cu fiecare altul câte o singură partidă și că în total s-au jucat 78 de partide, aflați care este cel mai mic număr de tenismeni pe care îl poate avea clubul mai numeros.



a) 7

b) 6

c) 9

d) 13

Demonstrație. Dacă notăm cu n numărul total de sportivi care au participat la competiție, atunci fiecare dintre aceștia a jucat $n - 1$ partide și numărul de partide este $n \times (n - 1) : 2$ pentru că fiecare partidă ar fi numărată altfel de două ori. Așadar, $n \times (n - 1) : 2 = 78 \iff n \times (n - 1) = 78 \times 2 \iff n \times (n - 1) = 156$. Pentru $n < 13$ obținem că $n \times (n - 1) < 13 \times 12 = 156$, pentru $n > 13$ obținem că $n \times (n - 1) > 13 \times 12 = 156$, deci $n = 13$. Cel mai mic număr de tenismeni pe care îl poate avea clubul mai numeros este 7.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): a) 5p □

Problema 15

Un schior are 5 geci, 3 perechi de ochelari și 4 căști, fiecare având altă culoare. În câte feluri diferite se poate echipa?

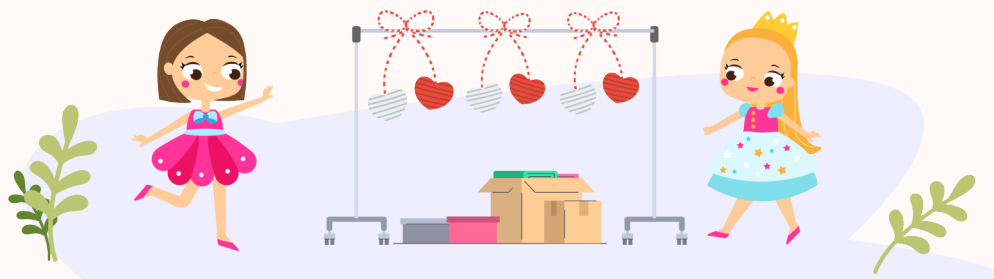


Demonstrație. Pentru fiecare alegere a gecii, schiorul își poate alege perechea de ochelari în 3 moduri diferite și pentru fiecare alegere a perechii de ochelari își poate alege casca în 4 moduri diferite, adică în $3 \times 4 = 12$ variante. Cum geaca poate fi aleasă în 5 moduri diferite obținem că numărul de variante diferite în care se poate echipa este $5 \times 12 =$ 60.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): 60 5p □

Problema 16

Irina și Maria au confecționat măștișoare roșii, galbene și verzi și le-au agățat pe un suport în linie dreaptă astfel încât printre oricare trei măștișoare consecutive există câte unul din fiecare culoare. Numărând de la stânga la dreapta fetele au constatat că al doilea măștișor este roșu și al treizecilea este galben. Ce culoare are măștișorul de pe locul 80 atunci când numărăm de la stânga la dreapta?



- a) roșu
- b) galben
- c) verde
- d) nu sunt suficiente informații

Demonstrație. Vom numerota cu 1, 2, 3, 4, măștișoarele de la stânga la dreapta. Printre măștișoarele 1, 2, 3 și 2, 3, 4 există toate cele trei culori, deci măștișoarele 1 și 4 au aceeași culoare. Repetând raționamentul se observă că măștișoarele 2 și 5 au aceeași culoare, la fel 3 și 6. Continuând același procedeu observăm că din 3 în 3 măștișoarele au aceeași culoare, mai precis cele care dau același rest la împărțirea prin 3.

Măștișorul de pe al doilea loc este roșu și $2 = 3 \times 0 + 2$, deci toate măștișoarele de pe locurile de forma $3 \times k + 2$ sunt roșii. Al treizecilea este galben și $30 = 3 \times 10 + 0$, deci cele de pe locurile care se împart exact la 3 sunt galbene, iar cele de pe locurile de forma $3 \times k + 1$ sunt verzi. Cum $80 = 3 \times 26 + 2$ rezultă că al optzecilea măștișor este roșu.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): a) 5p

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: 20p
Total: 100p

Timp de lucru: 2 ore